幂函数

一、课后练习

1.已知幂函数 $f(x)=kx^{\alpha}$的图像过点$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 $k+\alpha=$【E】

A.2

B.$\frac{5}{2}$

C.$\frac{7}{2}$

D.1

E.$\frac{3}{2}$

【解析】已知该函数为幂函数，则系数 $k=1$.

由题目带入点的坐标，可得：$f(x)=kx^{\alpha}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得$\alpha=\frac{1}{2}$.

则 $k+\alpha=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

故选 E.

2.已知幂函数 $y=\left(m^2-3m+3\right)x^{m^2-m-2}$的图像不过原点，则 m 有几种取值？【C】

A.0

B.1

C.2

D.3

E.无数个

【解析】已知该函数为幂函数，则系数$m^2-3m+3=1$，解得 $m=1$ 或 $m=2$.

当 $m=1$ 时，$y=x^{1-1-2}=x^{-2}$，此时图像不过原点.

当 $m=2$ 时，$y=x^{4-2-2}=x^{0}$，此时图像不过原点.

则 m 有两种取值.

故选 C.

3.已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$和 $g(x)=x^{\beta}$，其中$\alpha>\beta>0$，则有下列说法：

①$f(x)$和 $g(x)$图像都过点$(1,1)$；

②$f(x)$和 $g(x)$图像都过点$(-1,1)$；

③在区间$[1,+\infty)$上，增长速度更快的是 $f(x)$；

④在区间$[1,+\infty)$上，增长速度更快的是 $g(x)$；

则其中正确命题的有几个？【C】

A.0

B.1

C.2

D.3

E.4

【解析】特值法. 不妨设 $f(x)=x^2$和 $g(x)=x$.

此时 $f(x)$和 $g(x)$图像都过点$(1,1)$但 $g(x)$不过$(-1,1)$，则命题①正确.

在区间$[1,+\infty)$上，增长速度更快的是 $f(x)$，则命题③正确.

则正确的命题有两个.

故选 C.

4.在下列函数中，定义域和值域不同的有几个？【B】

①$y=x^{\frac{1}{3}}$；

②$y=x^{\frac{5}{3}}$；

③$y=x^{\frac{1}{6}}$；

④$y=x^{\frac{2}{3}}$；

A.0

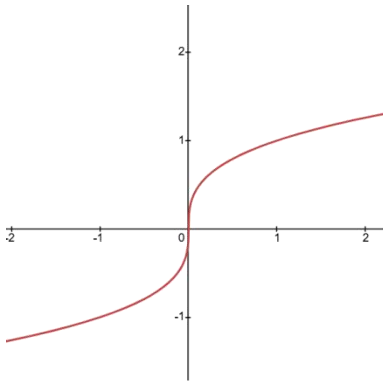
B.1

C.2

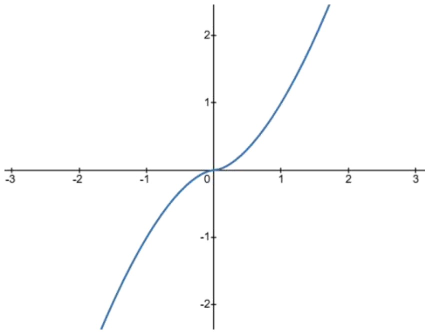
D.3

E.4

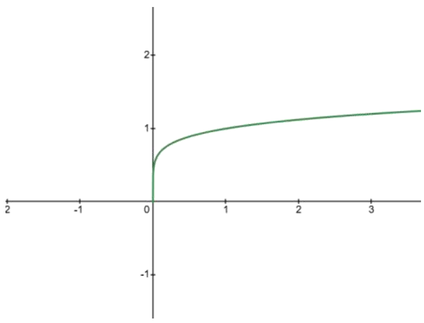
【解析】①$y=x^{\frac{1}{3}}$的图像如下图所示，定义域为 $x\in R$，值域为 $y\in R$，则相同.



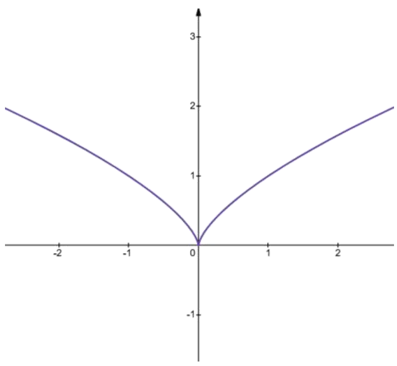
②$y=x^{\frac{5}{3}}$的图像如下图所示，定义域为 $x\in R$，值域为 $y\in R$，则相同.



③$y=x^{\frac{1}{6}}$的图像如下图所示，定义域为 $x\in[0,+\infty)$，值域为 $y\in[0,+\infty)$，则相同.



④$y=x^{\frac{2}{3}}$的图像如下图所示，定义域为 $x\in R$，值域为 $y\in[0,+\infty)$，则不相同.



综上，定义域和值域不同的有一个.

故选 B.

5. 幂函数 $y=f(x)$的图像过点$\left(2,\sqrt{2}\right)$，则 $y=x-f(x)$的值域中最小的整数为【E】

A.-1

B.1

C.-2

D.2

E.0

【解析】设该幂函数为 $y=f(x)=x^{\alpha}$，则$2^{\alpha}=\sqrt{2}$，解得$\alpha=\frac{1}{2}$，幂函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

$y=x-f(x)=x-\sqrt{x}$.

令 $t=\sqrt{x}\geq 0$，则 $y=t^2-t$.

此时 y 的对称轴为$-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$，$y_{min}=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$.

$y=x-f(x)$的值域为$\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$，最小的整数为 0.

故选 E.

6. 已知函数 $f(x)=\left(x^2-4x+3\right)^{\frac{3}{2}}$的增区间中最小的整数为【A】

A.3

B.4

C.5

D.6

E.不存在

【解析】令$t=x^2-4x+3$，则 $f(x)=t^{\frac{3}{2}}=\sqrt{t^3}$，此时 $t\geqslant 0$.

即$t=x^2-4x+3\geq 0$，解得 $x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 3$.

当 $x\leqslant 1$ 时，t 单调递减；

当 $x\geqslant 3$ 时，t 单调递增.

根据复合函数同增异减，当 t 单调递增时，$f(x)=\sqrt{t^3}$为增函数.

即 $f(x)$增区间中最小的整数为 3.

故选 A.

7.已知幂函数 $f(x)=\left(m^2-4m+4\right)x^{m^2-2m}$在$\left(0,+\infty\right)$上是增函数，则满足要求的整数 m 有几个？【B】

A.0

B.1

C.2

D.3

E.无数个

【解析】已知该函数为幂函数，则系数$m^2-4m+4=1$，解得 $m=1$ 或 $m=3$.

当 $m=1$ 时，$f(x)=x^{1-2}=\frac{1}{x}$，单调递减；

当 $m=3$ 时，$f(x)=x^{9-6}=x^3$，单调递增.

则满足要求的整数 m 有 1 个.

故选 B.

8.已知幂函数 $f(x)=\left(8m^2-2m\right)x^m$在$\left(0,+\infty\right)$上是增函数，则 $f(4)=$【C】

A.6

B.4

C.2

D.3

E.8

【解析】已知该函数为幂函数，则系数$8m^2-2m=1$，解得 $m=\frac{1}{2}$或 $m=-\frac{1}{4}$.

当 $m=\frac{1}{2}$时，$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，单调递增；

当 $m=-\frac{1}{4}$时，$f(x)=x^{-\frac{1}{4}}$，单调递减.

则增函数时，$f(4)=4^{\frac{1}{2}}=2$.

故选 C.

9.已知幂函数 $f(x)=\left(a^2-3a+3\right)x^{a+1}$为偶函数，则整数 a 有几个取值？【B】

A.0

B.1

C.2

D.3

E.无数个

【解析】已知该函数为幂函数，则系数$a^2-3a+3=1$，解得 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时，$f(x)=x^2$，偶函数；

当 $a=2$ 时，$f(x)=x^3$，奇函数.

则为偶函数时只有一个取值.

故选 B.

10.已知$(5-2m)^{\frac{1}{2}}<(m-1)^{\frac{1}{2}}$，则 m 的取值范围包含几个质数？【A】

A.0

B.1

C.2

D.3

E.无数个

【解析】因为 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$为增函数且定义域 $x>0$.

则 $0<5-2m<m-1$，解得 $2<m\leq\frac{5}{2}$.

则在 m 的取值范围内没有质数.

故选 A.

11.已知幂函数 $y=(m^2-m-1)x^{m^2-2m-3}$，不是偶函数，m 为整数，当 $x\in(0,+\infty)$时为减函数，求 $y(2)=$【B】

A.$\frac{1}{4}$

B.$\frac{1}{8}$

C.$\frac{1}{16}$

D.4

E.8

【解析】已知该函数为幂函数，则系数$m^2-m-1=1$，解得 $m=-1$ 或 $m=2$.

当 $m=-1$ 时，$y=x^{1+2-3}=x^0=1$，关于 y 轴对称，偶函数；

当 $m=2$ 时，$y=x^{4-4-3}=x^{-3}$，奇函数.

则 $y(2)=2^{-3}=\frac{1}{8}$.

故选 B.

12.已知幂函数 $y=x^{m-2}(m\in N)$的图像与 x, y 轴都无交点，且关于 y 轴对称，求 m 有几个取值？

【C】

A.0

B.1

C.2

D.3

E.无数个

【解析】已知该幂函数的图像与 x,y 轴无交点，则 $m-2\leq 0\Rightarrow m\leq 2$.

$\because m\in N$，$\therefore m=0,1,2$.

当 $m=0$ 时，$y=x^{-2}$，偶函数，关于 y 轴对称；

当 $m=1$ 时，$y=x^{-1}$，奇函数，不关于 y 轴对称；

当 $m=2$ 时，$y=x^0=1$，关于 y 轴对称.

则关于 y 轴对称时有两个取值.

故选 C.

13.若点$(\sqrt{2},2)$在幂函数 f(x)的图像上，点$\left(-2,\frac{1}{4}\right)$在幂函数 g(x)的图像上，求 $\min\left(f(x),g(x)\right)$的最大值.【D】

A.4

B.3

C.2

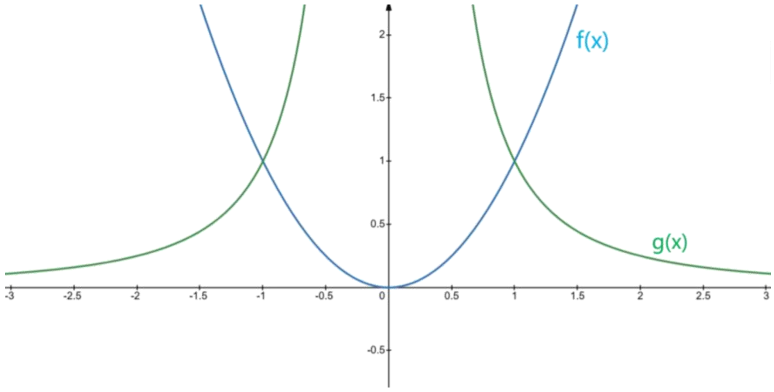
D.1

E.不存在

【解析】设 $f(x)=x^{\alpha}$，$(\sqrt{2})^{\alpha}=2$，$\alpha=2$，则 $f(x)=x^2$.

设 $g(x)=x^{\beta}$，$(-2)^{\beta}=\frac{1}{4}$，$\beta=-2$，则 $g(x)=x^{-2}$.

f(x)与 g(x)的图像如图所示：

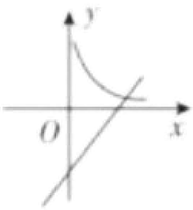


则 $\min(f(x),g(x))$的最大值为 1.

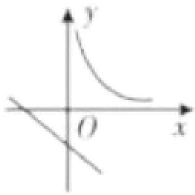
故选 D.

二、补充练习

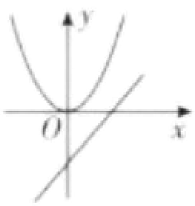
1. 在同一平面直角坐标系中函数 $y=x^a(a\neq 0)$和 $y=ax+\frac{1}{a}$的图像可能是【B】



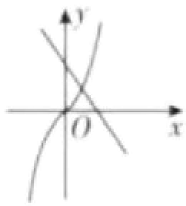
A



B



C



D

【解析】本题考查幂函数图像.

当 $a>0$ 时，函数 $y=x^a$在第一象限单调递增，直线 $y=ax+\frac{1}{a}$经过第一、二、三象限，无选项

符合题意;

当 $a<0$ 时，函数 $y=x^a$ 在第一象限单调递减，直线 $y=ax+\frac{1}{a}$ 经过第二、三、四象限，选项 B 符合题意.

故选 B.

2. 幂函数 $y=x^{a^2-2a-3}$ 是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 是减函数，则整数 a 的值是【D】

A.0

B.1

C.2

D.0 或 2

E.1 或 2

【解析】本题考查幂函数单调性.

由幂函数 $y=x^{a^2-2a-3}$ 在 $(0,+\infty)$ 是减函数，则 $a^2-2a-3<0$.

解得 $-1<a<3$.

则整数 a 的取值可能为 0、1、2.

当 $a=0$ 时，幂函数 $y=x^{-3}$ 为奇函数，符合题意.

当 $a=1$ 时，幂函数 $y=x^{1-2-3}=x^{-4}$ 为偶函数，不符合题意.

当 $a=2$ 时，幂函数 $y=x^{4-4-3}=x^{-3}$ 为奇函数，符合题意.

故选 D.

3. 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图像经过点 $\left(4,\frac{1}{2}\right)$，若 $f(a+1)\le f(4-2a)$，则实数 a 的取值范围为【B】

A. $(1,3]$

B. $[1,2)$

C. $[1,+\infty)$

D. $(-1,2)$

E. $(-1,1]$

【解析】本题考查幂函数单调性.

设幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$，$4^{\alpha}=\frac{1}{2}$，解得$\alpha=-\frac{1}{2}$.

则 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$，在$(0,+\infty)$上单调递减且 $x>0$.

$f(a+1)\le f(4-2a)$.

则$\begin{cases}a+1>0\\4-2a>0\\a+1\ge 4-2a\end{cases}$，即$\begin{cases}a>-1\\a<2\\a\ge 1\end{cases}$.

即 $1\leqslant a<2$.

故选 B.

4. 已知 $a=2^{-\frac{3}{2}}$，$b=\left(\frac{2}{5}\right)^{3}$，$c=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$，则 a、b、c 的大小顺序正确的是【D】

A. $c>a>b$

B. $a>b>c$

C. $b>a>c$

D. $a>c>b$

E. $b>c>a$

【解析】本题考查幂函数单调性.

$a=2^{-\frac{3}{2}}=\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{3}$.

∵幂函数 $y=x^{3}$在$(0,+\infty)$是增函数，且$\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{1}{2}>\frac{2}{5}$.

$\therefore a>c>b$.

故选 D.

5. 幂函数 $f(x)$的图像经过点$(4,2)$，若 $0<a<b<1$，则下列各式正确的是【C】

A. $f(a)<f(b)<f\left(\frac{1}{a}\right)<f\left(\frac{1}{b}\right)$

B. $f\left(\frac{1}{a}\right)<f\left(\frac{1}{b}\right)<f(b)<f(a)$

C. $f(a)<f(b)<f\left(\frac{1}{b}\right)<f\left(\frac{1}{a}\right)$

D. $f\left(\frac{1}{a}\right)<f(a)<f\left(\frac{1}{b}\right)<f(b)$

E.$f\left(\frac{1}{a}\right)<f\left(\frac{1}{b}\right)<f(a)<f(b)$

【解析】本题考查幂函数单调性.

设幂函数的解析式为 $f(x)=x^{\alpha}$，由 $f(x)$的图像经过点$(4,2)$得$4^{\alpha}=2$.

解得$\alpha=\frac{1}{2}$，即 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

∵$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$在$(0,+\infty)$上为增函数，且 $0<a<b<1$.

∴$0<a<b<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$.

∴$(a)<f(b)<f\left(\frac{1}{b}\right)<f\left(\frac{1}{a}\right)$

故选 C.

6. 若$\left(\frac{1}{2}\right)^{a}=\log_2 a$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{b}=b^2$，$c^{\frac{1}{2}}=2^{-c}$，则正数 a, b, c 大小关系是【B】

A.$c<a<b$

B.$c<b<a$

C.$a<c<b$

D.$a<b<c$

E.$b<c<a$

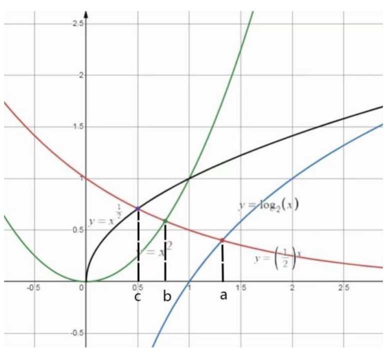
【解析】本题考查幂函数图像.

由$\left(\frac{1}{2}\right)^{a}=\log_2 a$，则 a 为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$与 $y=\log_2 x$交点的横坐标.

由$\left(\frac{1}{2}\right)^{b}=b^2$，则 b 为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$与 $y=x^2$交点的横坐标.

由$c^{\frac{1}{2}}=2^{-c}$，$2^{-c}=\left(\frac{1}{2}\right)^{c}$则 c 为 $y=x^{\frac{1}{2}}$与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$交点的横坐标.

作出 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$，$y=\log_2 x$，$y=x^2$，$y=x^{\frac{1}{2}}$的图像，如图所示.



则 $c<b<a$.

故选 B.

7. 若集合 $M=\left\{y\middle|y=2^{-x}\right\}$，$P=\left\{y\middle|y=\sqrt{x-1}\right\}$，$M\cap P=$【C】

A.$\{y|y>1\}$

B.$\{y|y\geq 1\}$

C.$\{y|y>0\}$

D.$\{y|y\geq 0\}$

【解析】本题考查幂函数值域.

$y=2^{-x}$为指数函数，值域 $y>0$，则集合 M 为$\left\{y\middle|y>0\right\}$.

$y=\sqrt{x-1}$，值域 $y\geqslant 0$，则集合 P 为$\{y|y\geq 0\}$.

则 $M\cap P=\left\{y\middle|y>0\right\}$.

故选 C.

8. 幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$的图像经过点$\left(4,\frac{1}{2}\right)$，则 $f\left(\frac{1}{4}\right)$的值为【C】

A.4

B.3

C.2

D.1

E.0

【解析】本题考查幂函数.

幂函数 $f(x)=4^{\alpha}=\frac{1}{2}$，解得 $\alpha=-\frac{1}{2}$.

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(2^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}=2$.

故选 C.

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x<1\\ 2^{x}, & x\geq 1\end{cases}$，则满足 $f\left(f(a)\right)=2^{f(a)}$的 a 的取值范围是【C】

A.$\left[\frac{2}{3},1\right]$

B.[0,1]

C.$\left[\frac{2}{3},+\infty\right]$

D.$\left[1,+\infty\right]$

E.[1,2]

【解析】本题考查幂函数.

当 $x \geqslant 1$ 时，才有 $f(x)=2^{x}$.

则 $f\left(f(a)\right)=2^{f(a)}$时，$f(a) \geqslant 1$.

根据函数 f(x)的图像，当 $x<1$，$f(x)<2$；当 $x \geq 1$，$f(x) \geq 2$.

要使 $f(a) \geqslant 1$，$f(a)=3a-1 \geq 1$. 则 $a \geq \frac{2}{3}$.

故选 C.

锥体

一、课后练习

1.已知圆锥地面圆的半径为 6，高为 8.则圆锥的侧面积为【D】

A.48

B.48π

C.120π

D.60π

E.90π

【解析】$r=6$，$h=8$，母线 $l=\sqrt{r^2+h^2}=10$.

圆锥侧面积$S_{侧}=\pi rl=\pi\times 6\times 10=60\pi$.

故选 D.

2.将一个圆心角是 90° 的扇形围成一个圆锥的侧面，则该圆锥的侧面积$S_{侧}$和底面积$S_{底}$的关系为【E】

A.$S_{侧}=S_{底}$

B.$S_{侧}=2S_{底}$

C.$S_{侧}=3S_{底}$

D.$S_{侧}=3.5S_{底}$

E.$S_{侧}=4S_{底}$

【解析】圆心角$\theta=\frac{2\pi r}{l}=\frac{\pi}{2}$，则 $l=4r$.

$\frac{S_{侧}}{S_{底}}=\frac{\pi rl}{\pi r^2}=\frac{l}{r}=4$.

故选 E.

3.如图 1，在正方形铁皮上剪下一个扇形和一个半径为 1 的圆形，使之恰好围成图 2 所示的一个圆锥，则圆锥的高为【C】

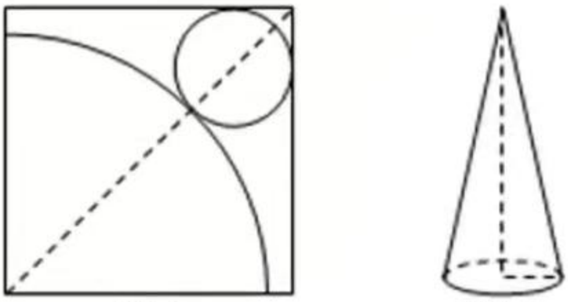


图 1　　图 2

A.$\sqrt{17}$

B.4

C.$\sqrt{15}$

D.$\sqrt{3}$

E.3.5

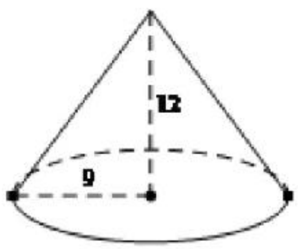
【解析】由图可得，圆锥的底面半径为 1.

圆心角$\theta=\frac{2\pi r}{l}=\frac{\pi}{2}$，则 $l=4r=4$.

$h=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$.

故选 C.

4.小红需要用扇形薄纸板成底面半径为 9 厘米，高为 12 厘米的圆锥形生日帽，则该扇形薄纸板的圆心角为【C】



A.150°

B.180°

C.216°

D.240°

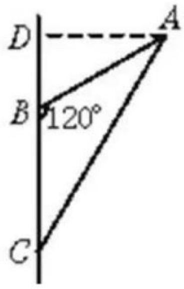
E.270°

【解析】由题意得：母线 $l=\sqrt{12^2+9^2}=15$.

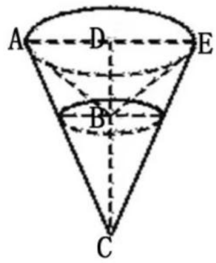
圆心角$\theta=\frac{360°r}{l}=\frac{9\times360°}{15}=216°$

故选 C.

5.在△ABC 中，AB＝2，BC＝1.5，∠ABC＝120°（如图所示），若将△ABC 绕直线 BC 旋转一周，则所形成的旋转体的体积是【E】



图(a)



图(b)

A.$\frac{7}{2}\pi$

B.$\frac{5}{2}\pi$

C.2π

D.$\frac{1}{2}\pi$

E.$\frac{3}{2}\pi$

【解析】由图可得：该旋转体的体积为圆锥 ACD－圆锥 ABD.

∵∠ABC＝120°，AB＝2.

∴∠ABD＝60°，BD＝1，AD＝$\sqrt{3}$，CD＝2.5.

则$V_{旋转体}=\frac{1}{3}\pi r^2(CD-BD)=\frac{1}{3}\pi\times3\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\pi$.

故选 E.

6.在一个深为 50m，顶圆半径为 100m 的正圆锥体储水容器储满水，假设其水位以 2m/h 的速度均匀下降，当 10 小时的时候，水池内有多少水？【B】

A.108 000π

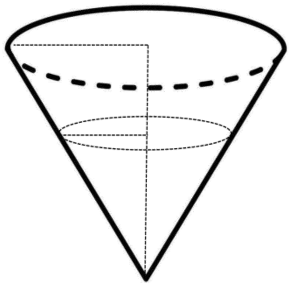
B.36 000π

C.54 000π

D.21 600π

E.10 800π

【解析】由题目可画图如下.



$r=100$，$h=50$.

10 小时的时候，水池的高度为$h_1=50-2\times10=30\text{m}$.

由相似三角形可得：此时水面圆的半径$r_1=60\text{m}$.

则水池的水$V_{水}=\frac{1}{3}\pi\times60^2\times30=36\ 000\pi$.

故选 B.

7.一个底面直径为 20 的装有一部分水的圆柱形容器，水中放着一个底面直径为 12，高为 10 的圆锥形的铅锤，当铅锤从水中取出来，容器中的水面高度下降了【D】

A.2.4

B.2

C.1.6

D.1.2

E.0.9

【解析】圆锥形的铅锤体积为$V_{锥}=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{12}{2}\right)^2\times10=120\pi$.

则水池的水$V_{水}=\pi\times\left(\frac{20}{2}\right)^2\times h=120\pi$.

解得 $h=1.2$.

故选 D.

8.有一个圆锥体沙堆，底面积是 20 平方米，高 1.2 米.用这堆沙铺在 10 米宽的公路上，铺 2 厘米厚，能铺多少米长的公路？【D】

A.20 米

B.25 米

C.30 米

D.40 米

E.45 米

【解析】设能铺 x 米长的公路.

圆锥体沙堆体积为$V_{沙}=\frac{1}{3}\times 20\times 1.2=V_{路}=10\times 0.02x$.

解得 $x=40$.

故选 D.

9. 若一个圆锥的轴截面是等边三角形，其面积为$\sqrt{3}$，则这个圆锥的全面积是【A】

A.3π

B.$3\sqrt{3}\pi$

C.6π

D.9π

E.10π

【解析】由等边三角形的面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times l^2=\sqrt{3}$.

则母线 $l=2$，$r=1$.

圆锥全面积$S_{全}=\pi r(r+l)=\pi\times 1\times 3=3\pi$.

故选 A.

10.在半径为 30 米的圆形广场中央上空，设置一个照明光源，射向地面的光是圆锥形，且轴截面顶角为 120°，若要光源恰好照亮整个广场，则其高度应为多少米？【C】

A.$30\sqrt{3}$

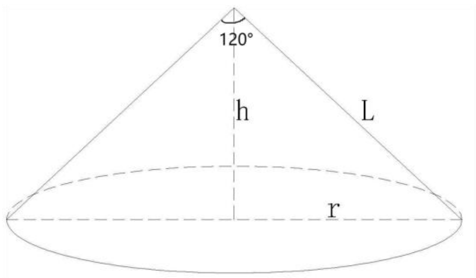
B.$15\sqrt{2}$

C.$10\sqrt{3}$

D.15

E.16

【解析】根据题目画图可得：



r＝30m，则根据截面顶角为 120°得：$h=\frac{r}{\tan 60°}=\frac{30}{\sqrt{3}}=10\sqrt{3}$.

故选 C.

11. 已知圆锥的底面半径为 6，母线长为 10，则圆锥的外接球表面积为【E】

A.300π

B.360π

C.450π

D.540π

E.$\frac{625}{4}\pi$

【解析】圆锥的高为 $h=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

根据公式，外接球的半径 $R=\frac{l^2}{2h}=\frac{100}{2\times 8}=\frac{25}{4}$.

外接球的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times\frac{25\times 25}{4\times 4}=\frac{625}{4}\pi$.

故选 E.

12.有一个倒圆锥形容器，它的轴截面是一个正三角形，在容器内放入一个半径为 r 的球，并注入水，使水面与球正好相切，然后将球取出，这时容器中水的深度是【A】

A.$\sqrt[3]{15}r$

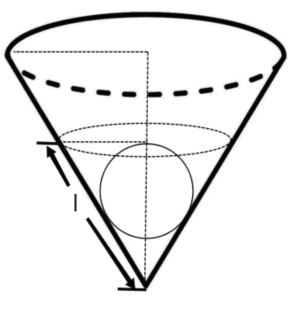
B.2r

C.$\frac{3r}{2}$

D.$\sqrt{6}r$

E.$\sqrt[3]{14}r$

【解析】根据题目如图所示：



球为水面下的圆锥体的内切球，则球半径与圆锥母线关系为$\frac{\sqrt{3}}{6}l=r\Rightarrow l=2\sqrt{3}r$.

由轴截面为正三角形，则水面圆的半径为 $R=\frac{1}{2}l=\sqrt{3}r$，$h=\sqrt{3}R=3r$.

此时球在水里时，水面下的圆锥体的体积为$V_{大}=\frac{1}{3}\pi\times\left(\sqrt{3}r\right)^2\times 3r=3\pi r^3$.

其中水的体积$V_{水}=V_{大}-V_{球}=3\pi r^3-\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{5}{3}\pi r^3$.

设取出球后的水面下的圆锥体的高为 h.

则$V_{水}=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2\times h=\frac{\pi h^3}{9}$.

得$\frac{\pi h^3}{9}=\frac{5}{3}\pi r^3\Rightarrow h=\sqrt[3]{15}r$.

故选 A.

二、补充练习

1. 已知圆锥的轴截面是等腰直角三角形，且圆锥的母线长为 2，则圆锥的侧面积是【D】

A.2

B.$\sqrt{2}\pi$

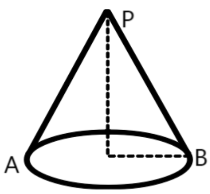
C.2π

D.$2\sqrt{2}\pi$

E.$4\sqrt{2}\pi$

【解析】本题考查圆锥侧面积.

圆锥如图，△PAB 为轴截面，则∠APB=90°.



$\because AP=BP=2$

$\therefore AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

则 $r=\sqrt{2}$，圆锥侧面积为 $\pi rl=\pi\times\sqrt{2}\times 2=2\sqrt{2}\pi$.

故选 D.

2. 已知圆锥的底面半径为 1，侧面展开图的圆心角为 60°，则此圆锥的表面积为【D】

A.3π

B.4π

C.6π

D.7π

E.9π

【解析】本题考查圆锥表面积.

设圆锥的母线为 l，则侧面展开图的弧长为$\frac{60°}{360°}\times 2\pi\times l=\frac{\pi}{3}l$.

底面周长也为 $2\pi r=2\pi$.

则 $2\pi=\frac{\pi}{3}l$，解得 $l=6$.

此圆锥的表面积为 $S=\pi r^2+\pi rl=\pi\times 1+\pi\times 1\times 6=7\pi$.

故选 D.

3. 从正方体里削出一个最大的圆锥，圆锥的体积是$\frac{\pi}{2}$，则正方体的体积是【B】

A.4

B.6

C.8

D.9

E.12

【解析】本题考查圆锥、正方体体积.

设正方体的棱长为 a，圆锥的底面是正方形的内切圆，则圆锥的底面半径为$\frac{a}{2}$.

圆锥的体积为$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot a=\frac{\pi}{2}$，解得$a^3=6$. 则正方体的体积为 6.

故选 B.

4. 已知圆锥的轴截面是一个边长为 2 的等边三角形，则该圆锥的侧面积为【D】

A.3π

B.$\frac{8}{3}\pi$

C.$\frac{7}{3}\pi$

D.2π

E.π

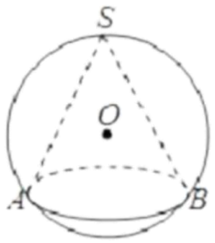
【解析】本题考查圆锥轴截面.

由题意得，圆锥的底面半径为 1，母线长为 2.

则圆锥的侧面积为 $\pi rl=\pi\times1\times2=2\pi$.

故选 D.

5. 如图，已知一个底面半径为 1，高为 3 的圆锥内接于球 O，则球 O 的表面积为【A】



A. $\frac{100}{9}\pi$

B. $\frac{50}{3}\pi$

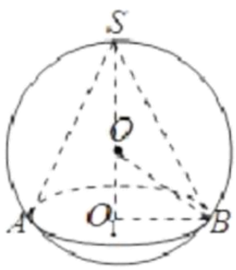
C. $\frac{50}{9}\pi$

D. $\frac{20}{3}\pi$

E. $\frac{20}{9}\pi$

【解析】本题考查圆锥外接球.

设圆锥的底面圆心为O_1，球 O 的半径为 R，如图.



则 $OO_1=3-R$，由勾股定理得：$(3-R)^2+1^2=R^2$.

解得：$R=\frac{5}{3}$.

则球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{100\pi}{9}$.

故选 A.

6. 已知圆锥的底面半径为 2，高为 $4\sqrt{2}$，则该圆锥内切球的表面积为【C】

A. 4π

B. $4\sqrt{2}\pi$

C. 8π

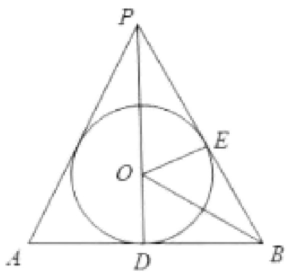
D. $8\sqrt{2}\pi$

E. 2π

【解析】本题考查圆锥内切球.

由勾股定理可得圆锥的母线长为 $\sqrt{(4\sqrt{2})^2+2^2}=6$.

截面如图所示，设该圆锥的内切球的半径为 r.



由三角形相似可得：$\frac{DB}{PB}=\frac{OE}{PO}$.

即 $\frac{2}{6}=\frac{r}{4\sqrt{2}-r}$，解得 $r=\sqrt{2}$.

内切球的表面积为 $4\pi r^2=4\pi(\sqrt{2})^2=8\pi$.

故选 C.

7. 直角三角形 ABC 中，斜边 AB 长为 2，绕直角边 AC 所在直线旋转一周形成一个几何体，若该几何体外接球表面积为 $\frac{16\pi}{3}$，则 AC 长为【E】

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. 2

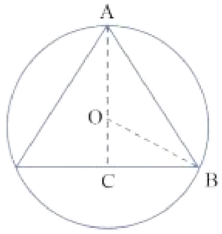
E. $\sqrt{3}$

【解析】本题考查圆锥外接球.

设圆锥外接球的半径为 R.

则 $4\pi R^2=\frac{16\pi}{3}$，解得 $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

设外接球的球心为 O，则球心在 AC 上，如图所示.



则有$\begin{cases} OC^2+BC^2=R^2=\frac{4}{3} \\ (R+OC)^2+BC^2=AB^2=4 \end{cases}$.

$\Rightarrow R^2+OC^2+2\cdot R\cdot OC+BC^2=4$.

$\Rightarrow \frac{4}{3}+\frac{4}{3}+2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot OC=4$.

则 $OC=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AC=\sqrt{3}$.

故选 E.

8. 正三棱锥底面边长为 3，侧棱长为 $2\sqrt{3}$，则下列结论正确的有____个.【D】

①正三棱锥高为 3；

②正三棱锥的斜高为$\frac{\sqrt{39}}{2}$；

③正三棱锥的体积为$\frac{27\sqrt{3}}{4}$；

④正三棱锥的侧面积为$\frac{9\sqrt{39}}{4}$.

A.0

B.1

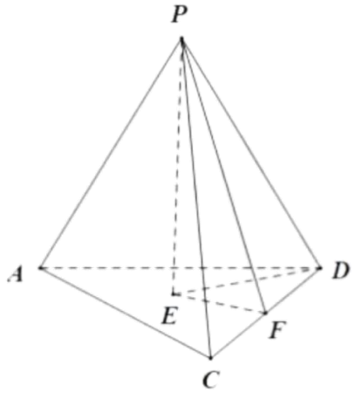
C.2

D.3

E.4

【解析】本题考查三棱锥的基本公式.

如图所示，设 E 为等边三角形 ADC 的中心，F 为 CD 的中点，连接 PF,EF,PE，则 PE 为正三棱锥的高，PF 为斜高.



在等边△ACD 中，$EF=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

在△PCD 中，$PF=\sqrt{PC^2-CF^2}=\sqrt{12-\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{39}}{2}$. 则斜高为$\frac{\sqrt{39}}{2}$，故②正确.

正三棱锥高 $PE=\sqrt{PF^2-EF^2}=\sqrt{\frac{39}{4}-\frac{3}{4}}=3$. 故①正确.

正三棱锥的体积为 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 3\times 3=\frac{9\sqrt{3}}{4}$. 故③错误.

正三棱锥的侧面积为 $S=3\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{39}}{2}\times 3=\frac{9\sqrt{39}}{4}$. 故④正确.

综上，共有三个结论正确.

故选 D.

9. 正三棱锥的底面周长为 6，侧面都是直角三角形，则此棱锥的表面积为【A】

A.$\sqrt{3}+3$

B.$\sqrt{3}+1$

C.$\sqrt{3}+6$

D.$\frac{\sqrt{3}}{2}+3$

E.3

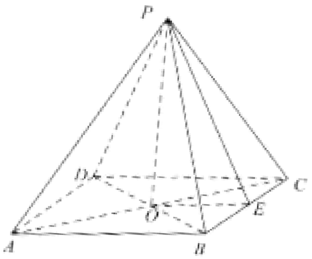
【解析】本题考查棱锥.

底面是边长为 2 的正三角形，底面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$.

每个侧面都是等腰直角三角形，斜边为 2，面积为$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$，共有 3 个侧面，则表面积为$\sqrt{3}+3$.

故选 A.

10. 如图，一个正四棱锥的底面的边长为 4，高与斜高的夹角为 30°，则正四棱锥的侧面积为【C】



A.8

B.16

C.32

D.$16\sqrt{3}$

E.64

【解析】本题考查棱锥.

由图可得，PO 是正棱锥的高，PE 是正棱锥的斜高，底面 ABCD 是正方形.

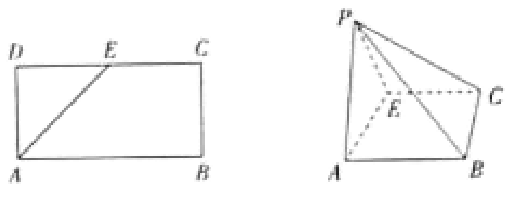
∵PO⊥OE，OE＝2，∠OPE＝30°.

∴PE＝4.

∴侧面积 $S=4\times\frac{1}{2}\times4\times4=32$.

故选 C.

11. 矩形 ABCD 中，AB＝4，AD＝2，点 E 为 CD 中点，沿 AE 把△ADE 折起，点 D 到达点 P，使得平面 PAE⊥平面 ABCE，则四棱锥 $P-ABCE$ 的体积为【D】



A.$6\sqrt{2}$

B.$4\sqrt{2}$

C.4

D.$2\sqrt{2}$

E.2

【解析】本题考查棱锥.

在△PAE 中，PA＝PE＝2，AE＝$2\sqrt{2}$，解得高为$\sqrt{2}$.

四边形 ABCE 的面积为$(2+4)\times 2\times\frac{1}{2}=6$.

四棱锥 $P-ABCE$ 的体积为$\frac{1}{3}\times 6\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

故选 D.